第 2 节 三大统一思想：角度、名称、次数（★★★）

强化训练

类型 I：给值求值问题

1．（2022·甘肃兰州模拟改·★★）已知 $\cos(\theta-\frac{\pi}{5})=\frac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\sin(2\theta+\frac{\pi}{10})=$______.

答案：$-\frac{1}{3}$

解析：经尝试，展开不易处理，故观察角的联系，将求值的角统一成已知的角，可将 $\theta-\frac{\pi}{5}$ 换元成 t 来看，

设 $\theta-\frac{\pi}{5}=t$，则 $\theta=t+\frac{\pi}{5}$，且 $\cos t=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以 $2\theta+\frac{\pi}{10}=2(t+\frac{\pi}{5})+\frac{\pi}{10}=2t+\frac{\pi}{2}$，

故 $\sin(2\theta+\frac{\pi}{10})=\sin(2t+\frac{\pi}{2})=\cos 2t=2\cos^2 t-1=-\frac{1}{3}$.

2．（2022·福建福州模拟·★★）已知 $\sin(\alpha-\frac{\pi}{4})=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\alpha\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$，则 $\sin\alpha=$______.

答案：$\frac{3\sqrt{10}}{10}$

解析：给值求值问题，先将求值的角统一成已知的角，为了便于观察，可将 $\alpha-\frac{\pi}{4}$ 换元，

令 $t=\alpha-\frac{\pi}{4}$，则 $\alpha=t+\frac{\pi}{4}$，且 $\sin t=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin\alpha=$

$\sin(t+\frac{\pi}{4})=\sin t\cos\frac{\pi}{4}+\cos t\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin t+\cos t)$ ①，

要求 $\sin\alpha$，需根据 $\sin t=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 求 $\cos t$，先研究 t 的范围，决定开平方取正还是取负，

因为 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{4})$，所以 $t\in(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$，从而 $\cos t>0$，

故 $\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

代入式①得：$\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}\times(\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{\sqrt{5}}{5})=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

3．（2022·北京模拟·★★★）已知 α，β 均为锐角，$\cos\alpha=\frac{1}{7}$，$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{11}{14}$，则 $\cos\beta=$______.

答案：$\frac{1}{2}$

解析：给值求值问题，可将求值的角统一成已知的角，为了便于观察，先将$\alpha+\beta$换元，

设$\gamma=\alpha+\beta$，则$\beta=\gamma-\alpha$，且$\cos\gamma=-\frac{11}{14}$，

所以$\cos\beta=\cos(\gamma-\alpha)=\cos\gamma\cos\alpha+\sin\gamma\sin\alpha$

$=\frac{1}{7}\times(-\frac{11}{14})+\sin\gamma\sin\alpha=-\frac{11}{98}+\sin\gamma\sin\alpha$ ①，

所以要求$\cos\beta$，需先求$\sin\gamma$和$\sin\alpha$，得分析γ的象限，决定开平方取正还是取负，

因为α，β均为锐角，所以$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{4\sqrt{3}}{7}$，

且$\gamma=\alpha+\beta\in(0,\pi)$，故$\sin\gamma=\sqrt{1-\cos^2\gamma}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，

代入式①可得$\cos\beta=-\frac{11}{98}+\frac{5\sqrt{3}}{14}\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=\frac{1}{2}$.

类型 II：三大思想的应用

4.（★★）若$3\sin^2\alpha-5\cos\alpha-1=0$，则$\cos2\alpha=$_____.

答案：$-\frac{7}{9}$

解析：观察发现将条件中$\sin^2\alpha$换成$1-\cos^2\alpha$，可统一函数名，求出$\cos\alpha$，再用二倍角公式求$\cos2\alpha$，

因为$3\sin^2\alpha-5\cos\alpha-1=0$，所以$3(1-\cos^2\alpha)-5\cos\alpha-1=0$，整理得：$3\cos^2\alpha+5\cos\alpha-2=0$，

解得：$\cos\alpha=\frac{1}{3}$或-2（舍去），故$\cos2\alpha=2\cos^2\alpha-1=-\frac{7}{9}$.

5.（2023·福建模拟·★★）若$\alpha\in(-\frac{\pi}{2},0)$，$2\tan\alpha=\frac{1}{\sin2\alpha}$，则$\sin\alpha=$（　　）

（A）$-\frac{\sqrt{2}}{2}$　（B）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　（C）$-\frac{1}{2}$　（D）$\frac{1}{2}$

答案：C

解析：要求的是$\sin\alpha$，故切化弦，且对$\sin2\alpha$用二倍角公式，统一角度，

由$2\tan\alpha=\frac{1}{\sin2\alpha}$得$\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1}{2\sin\alpha\cos\alpha}$，

化简得：$4\sin^2\alpha=1$，结合$\alpha\in(-\frac{\pi}{2},0)$可得$\sin\alpha=-\frac{1}{2}$.

6.（2023·福建模拟·★★）已知$16\cos^2\frac{\theta}{2}-3\cos2\theta=3$，则$\cos\theta=$（　　）

（A）$-\frac{\sqrt{5}}{3}$　（B）$-\frac{2}{3}$　（C）$\frac{2}{3}$　（D）$\frac{\sqrt{5}}{3}$

答案：B

解析：要求 $\cos\theta$，故将 $\cos 2\theta$ 换成 $2\cos^2\theta-1$，且对 $\cos^2\dfrac{\theta}{2}$ 升次，将角度统一为 θ，

由 $16\cos^2\dfrac{\theta}{2}-3\cos 2\theta=3$ 得 $16\cdot\dfrac{1+\cos\theta}{2}-3(2\cos^2\theta-1)=3$，

解得：$\cos\theta=-\dfrac{2}{3}$ 或 2（舍去）.

7.（2022 • 湖南模拟 • ★★）函数 $f(x)=\sin x\sin 2x-2\cos x$ 的最大值为_____.

答案：2

解析：先统一角度，对 $\sin 2x$ 用二倍角公式，

$f(x)=\sin x\sin 2x-2\cos x=\sin x\cdot 2\sin x\cos x-2\cos x$

$=2\cos x(\sin^2 x-1)$，

将 $\sin^2 x$ 换成 $1-\cos^2 x$，可统一函数名，

所以 $f(x)=2\cos x(1-\cos^2 x-1)=-2\cos^3 x$，

因为 $-1\le\cos x\le 1$，所以当 $\cos x=-1$ 时，$f(x)$ 取得最大值 2.

8.（2019 • 新课标 II 卷 • ★★★）已知 $\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$2\sin 2\alpha=\cos 2\alpha+1$，则 $\sin\alpha=$（　　）

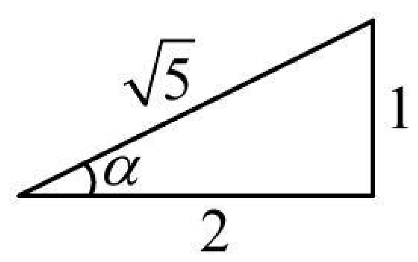
（A）$\dfrac{1}{5}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　（C）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　（D）$\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

答案：B

解析：看到 $\cos 2\alpha+1$，想到 $\cos^2\alpha=\dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$，故对 $\sin 2\alpha$ 也用倍角公式，把角度统一为 α 再看，

$2\sin 2\alpha=\cos 2\alpha+1\Rightarrow 4\sin\alpha\cos\alpha=2\cos^2\alpha$，又 $\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，所以 $\cos\alpha>0$，

约掉 $2\cos\alpha$ 得：$2\sin\alpha=\cos\alpha$，故 $\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$，利用“三角形法”可求得 $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.



9.（2022 • 浙江台州期末 • ★★★）若 $2\cos^2(\alpha-\dfrac{\pi}{3})+\cos 2\alpha=1$，则 $\tan 2\alpha=$（　　）

（A）$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　（B）$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　（C）$-\sqrt{3}$　　（D）$\sqrt{3}$

答案：A

解析：观察发现将所给等式中的平方降次，可统一次数，

$2\cos^2(\alpha-\dfrac{\pi}{3})+\cos 2\alpha=1\Rightarrow 2\cos^2(\alpha-\dfrac{\pi}{3})-1+\cos 2\alpha=0$，

所以 $\cos(2\alpha-\dfrac{2\pi}{3})+\cos 2\alpha=0$，

从而 $\cos 2\alpha \cos \frac{2\pi}{3} + \sin 2\alpha \sin \frac{2\pi}{3} + \cos 2\alpha = 0$，

故 $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{2}\cos 2\alpha = 0$，所以 $\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

10.（2023・吉林长春模拟・★★★）若 $\tan\alpha = -\frac{\cos\alpha}{3+\sin\alpha}$，则 $\sin(2\alpha + \frac{\pi}{2}) =$（　　）

（A）$\frac{1}{3}$　　（B）$\frac{2}{3}$　　（C）$\frac{7}{9}$　　（D）$\frac{8}{9}$

答案：C

解析：所给等式不易弦化切，故考虑切化弦，

由题意，$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{\cos\alpha}{3+\sin\alpha}$，所以 $\cos^2\alpha =$

$-\sin\alpha(3+\sin\alpha)$，从而 $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha + 3\sin\alpha = 0$，

故 $1 + 3\sin\alpha = 0$，解得：$\sin\alpha = -\frac{1}{3}$，

所以 $\sin(2\alpha + \frac{\pi}{2}) = \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{7}{9}$.

11.（★★★）若 $\tan\frac{\theta}{2} = 2$，则 $\frac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta} =$_____.

答案：$\frac{1}{2}$

解析：目标式中有 1，联想到升次公式，统一次数. 那 1 该与 $\sin\theta$ 组合，还是 $\cos\theta$ 呢？与 $\cos\theta$ 组合计算量要小一些. 为统一角度成 $\frac{\theta}{2}$，将剩余的 $\sin\theta$ 也打开，

由题意，$\frac{1+\sin\theta+\cos\theta}{1+\sin\theta-\cos\theta} = \frac{(1+\cos\theta)+\sin\theta}{(1-\cos\theta)+\sin\theta}$

$$= \frac{2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2} + 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{1+\tan\frac{\theta}{2}}{\tan^2\frac{\theta}{2} + \tan\frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2}.$$

【反思】当 1 即可与 $\sin\theta$ 组合升次，又可与 $\cos\theta$ 组合时，一般首先尝试与 $\cos\theta$ 组合.

12.（★★★）设 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$，则函数 $y = \frac{2\sin^2 x + 1}{\sin 2x}$ 的最小值为_____.

答案：$\sqrt{3}$

解法 1：欲求最小值，先对解析式变形，升次还是降次？若降次，会发现分子有多余的常数，不易处理，故将 1 换成 $\sin^2 x + \cos^2 x$ 升次，分母也升次，从而统一次数，

由题意，$y = \frac{2\sin^2 x + 1}{\sin 2x} = \frac{2\sin^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x}{2\sin x\cos x}$

$$= \frac{3\sin^2 x + \cos^2 x}{2\sin x\cos x} = \frac{3\sin x}{2\cos x} + \frac{\cos x}{2\sin x},$$

这两项均为正且积为定值，可用 $a+b\ge 2\sqrt{ab}$ 求最小值，

因为 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，所以 $\sin x>0$， $\cos x>0$，

故 $y=\dfrac{3\sin x}{2\cos x}+\dfrac{\cos x}{2\sin x}\ge 2\sqrt{\dfrac{3\sin x}{2\cos x}\cdot\dfrac{\cos x}{2\sin x}}=\sqrt{3}$，

当且仅当 $\dfrac{3\sin x}{2\cos x}=\dfrac{\cos x}{2\sin x}$，即 $\tan x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时取等号，此时 $x=\dfrac{\pi}{6}$，所以 $y_{\min}=\sqrt{3}$.

解法 2：第二个考虑的方向是对 $\sin^2 x$ 降次，也能统一角度，但接下来的处理技巧性较强，

由题意， $y=\dfrac{2\sin^2 x+1}{\sin 2x}=\dfrac{1-\cos 2x+1}{\sin 2x}=\dfrac{2-\cos 2x}{\sin 2x}$，将这个式子稍作变形，可化为两点连线的斜率处理，

$y=\dfrac{2-\cos 2x}{\sin 2x}=-\dfrac{\cos 2x-2}{\sin 2x-0}$，记 $P(\sin 2x,\cos 2x)$， $Q(0,2)$，则 $\dfrac{\cos 2x-2}{\sin 2x-0}$ 表示直线 PQ 的斜率，

要求 y 的最小值，只需求该斜率的最大值，先分析点 P 的运动轨迹，

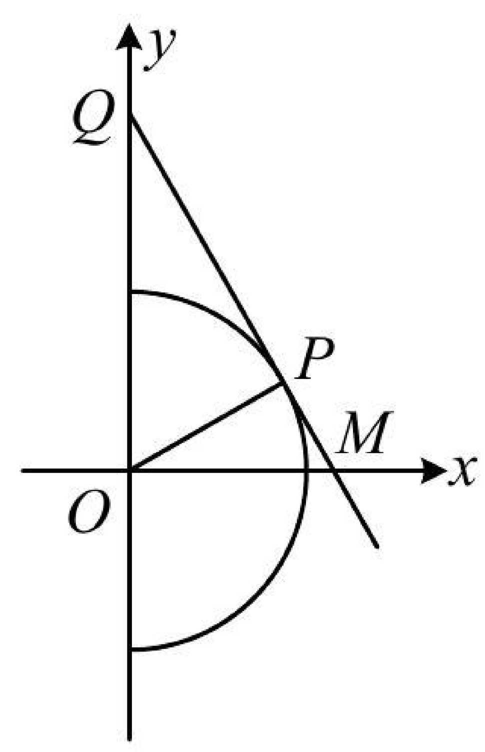
因为 $\sin^2 2x+\cos^2 2x=1$，所以点 P 在单位圆上运动，点 P 的轨迹是整个圆吗？可以看看 P 的坐标，

因为 $x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，所以 $2x\in(0,\pi)$，从而 $\sin 2x>0$，故点 P 只能在单位圆的右半圆上运动，如图，

由图可知当直线 PQ 恰与半圆相切时，直线 PQ 的斜率最大，此时 y 最小，

设切线 PQ 与 x 轴交于点 M，因为 $|OP|=1$， $|OQ|=2$， $OP\perp PQ$，所以 $\angle OQP=30^\circ$，

从而 $\angle OMQ=60^\circ$，故切线 PQ 的倾斜角为 120°，所以其斜率为 $-\sqrt{3}$，故 $y_{\min}=\sqrt{3}$.



13．（2022 • 云南曲靖模拟 • ★★★★）若 $\alpha\in(0,\dfrac{\pi}{2})$， $\beta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，且 $(1+\cos 2\alpha)(1+\sin\beta)=\sin 2\alpha\cos\beta$，则下列结论正确的是（　　）

（A） $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$　　（B） $\alpha+\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{\pi}{2}$　　（C） $2\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}$　　（D） $\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{2}$

答案：C

解析：所给等式中有 $1+\cos 2\alpha$ 、 $1+\sin\beta$，这两个都是使用升次公式的标志，但为了和右侧保持 β 的角度统一，所以 $1+\sin\beta$ 这项不动，只对 $1+\cos 2\alpha$ 升次，升次后为了统一角度，右侧的 $\sin 2\alpha$ 也相应升次，

因为 $(1+\cos 2\alpha)(1+\sin\beta)=\sin 2\alpha\cos\beta$，

所以 $2\cos^2\alpha(1+\sin\beta)=2\sin\alpha\cos\alpha\cos\beta$，

因为$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以$\cos\alpha>0$，从而$\cos\alpha(1+\sin\beta)=$

$\sin\alpha\cos\beta$，故$\cos\alpha+\cos\alpha\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta$，

所以$\cos\alpha=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$，故$\cos\alpha=\sin(\alpha-\beta)$ ①，

为了分析α和β的关系，可用诱导公式化同名来看，

因为$\cos\alpha=\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$，代入式①可得$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin(\alpha-\beta)$，

因为$\alpha,\beta\in(0,\frac{\pi}{2})$，所以$\frac{\pi}{2}-\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\alpha-\beta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$，

注意到函数$y=\sin x$在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$上↗，

所以$\frac{\pi}{2}-\alpha=\alpha-\beta$，故$2\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}$.

类型III：具体角三角函数式化简求值

14.（2022·北京模拟·★★）$\frac{\sin7^\circ+\cos15^\circ\sin8^\circ}{\cos7^\circ-\sin15^\circ\sin8^\circ}=$______.

答案： $2-\sqrt{3}$

解析： 注意到$7^\circ=15^\circ-8^\circ$，故可将角度统一为15°和8°，再化简，

原式$=\frac{\sin(15^\circ-8^\circ)+\cos15^\circ\sin8^\circ}{\cos(15^\circ-8^\circ)-\sin15^\circ\sin8^\circ}$

$=\frac{\sin15^\circ\cos8^\circ-\cos15^\circ\sin8^\circ+\cos15^\circ\sin8^\circ}{\cos15^\circ\cos8^\circ+\sin15^\circ\sin8^\circ-\sin15^\circ\sin8^\circ}=\frac{\sin15^\circ\cos8^\circ}{\cos15^\circ\cos8^\circ}$

$=\tan15^\circ=\tan(60^\circ-45^\circ)=\frac{\tan60^\circ-\tan45^\circ}{1+\tan60^\circ\tan45^\circ}=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$.

15.（2022·山西太原一模·★★★）$\sin20^\circ+\sin40^\circ=$（　　）

（A）$\sin50^\circ$　（B）$\sin60^\circ$　（C）$\sin70^\circ$　（D）$\sin80^\circ$

答案： D

解析： 本题涉及40°和20°这两个角，应将其统一，有两个方向，$40^\circ=2\times20^\circ$和$40^\circ+20^\circ=60^\circ$，若用二倍角公式把$\sin40^\circ$化掉，接下来就不好推进了，故选$40^\circ+20^\circ=60^\circ$，可将角统一成$20^\circ$或$40^\circ$，

$\sin20^\circ+\sin40^\circ=\sin20^\circ+\sin(60^\circ-20^\circ)$

$=\sin20^\circ+\sin60^\circ\cos20^\circ-\cos60^\circ\sin20^\circ$

$=\sin20^\circ+\sin60^\circ\cos20^\circ-\frac{1}{2}\sin20^\circ$

$=\sin60^\circ\cos20^\circ+\frac{1}{2}\sin20^\circ=\sin60^\circ\cos20^\circ+\cos60^\circ\sin20^\circ$

$=\sin(60^\circ+20^\circ)=\sin80^\circ$.